Relatividad Especial: Tipos de Energía

A. Torassa

ORCID § (2025) Buenos Aires

Argentina

En relatividad especial, este trabajo presenta las definiciones de energía cinética, energía en reposo y energía relativista para una simple partícula (masiva o no masiva) Posteriormente, este trabajo también presenta las definiciones de energía relativista generalizada y energía total para un sistema de partículas (masivas y no masivas)

Introducción

En relatividad especial, este trabajo se desarrolla a partir de las definiciones esenciales de masa intrínseca (o masa invariante) y factor relativista (o factor frecuencia) para partículas masivas y partículas no masivas.

La masa intrínseca (m) y el factor relativista (f) de una partícula masiva, están dados por:

$$m \doteq m_o \tag{1}$$

$$f \doteq \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{2}$$

donde (m_o) es la masa en reposo de la partícula masiva, ($\mathbf{v}$) es la velocidad de la partícula masiva y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

La masa intrínseca (m) y el factor relativista (f) de una partícula no masiva, están dados por:

$$m \doteq \frac{h\,\kappa}{c^2} \tag{3}$$

$$f \doteq \frac{\nu}{\kappa} \tag{4}$$

donde (h) es la constante de Planck, (ν) es la frecuencia de la partícula no masiva, (κ) es una constante universal positiva con dimensión de frecuencia y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

Según este trabajo, una partícula masiva ($m_o \neq 0$) es una partícula con masa en reposo no nula (o una partícula cuya velocidad v en el vacío es menor que c) y una partícula no masiva ($m_o = 0$) es una partícula con masa en reposo nula (o una partícula cuya velocidad v en el vacío es c)

Nota : La masa en reposo (m_o) y la masa intrínseca (m) son en general no aditivas y la masa relativista (m) de una partícula (masiva o no masiva) está dada por : ($\mathrm{m} \doteq m\,f$)

Cinemática Einsteniana

La posición especial ($\bar{\mathbf{r}}$) la velocidad especial ($\bar{\mathbf{v}}$) y la aceleración especial ($\bar{\mathbf{a}}$) de una partícula (masiva o no masiva) están dadas por:

$$\bar{\mathbf{r}} \doteq \int f\,\mathbf{v}\,dt \tag{5}$$

$$\bar{\mathbf{v}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = f\,\mathbf{v} \tag{6}$$

$$\bar{\mathbf{a}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = f\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{df}{dt}\,\mathbf{v} \tag{7}$$

donde (f) es el factor relativista de la partícula, ($\mathbf{v}$) es la velocidad de la partícula y (t) es el tiempo (coordenado)

Dinámica Einsteniana

Sea una partícula (masiva o no masiva) con masa intrínseca (m) entonces el momento lineal ($\mathbf{P}$) de la partícula, el momento angular ($\mathbf{L}$) de la partícula, la fuerza einsteniana neta ($\mathbf{F}_{\mathrm{E}}$) que actúa sobre la partícula, el trabajo (W) realizado por la fuerza einsteniana neta que actúa sobre la partícula, la energía cinética (K) de la partícula, la energía en reposo (E_o) de la partícula y la energía relativista (E) de la partícula, están dados por:

$$\mathbf{P} \doteq m\,\bar{\mathbf{v}} = m\,f\,\mathbf{v} \tag{8}$$

$$\mathbf{L} \doteq \mathbf{r} \times \mathbf{P} = m\,\mathbf{r} \times \bar{\mathbf{v}} = m\,f\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{9}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{E}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\,\bar{\mathbf{a}} = m\left[f\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{df}{dt}\,\mathbf{v}\right] \tag{10}$$

$$\mathrm{W} \doteq \int_1^2 \mathbf{F}_{\mathrm{E}} \cdot d\mathbf{r} = \Delta\,\mathrm{K} = \Delta\,\mathrm{E} \tag{11}$$

$$\mathrm{K} \doteq m\,f\,c^2 - m_o\,c^2 \tag{12}$$

$$\mathrm{E}_o \doteq m_o\,c^2 \tag{13}$$

$$\mathrm{E} \doteq \mathrm{K} + \mathrm{E}_o = m\,f\,c^2 \tag{14}$$

donde (f, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{\mathbf{a}}$) son el factor relativista, la posición, la velocidad, la velocidad especial y la aceleración especial de la partícula, (t) es el tiempo (coordenado) y (c) es la velocidad de la luz en el vacío. La energía cinética (K_o) de una partícula masiva en reposo es siempre cero puesto que en esta dinámica la energía relativista y la energía cinética de una partícula masiva no son lo mismo ($\mathrm{E} \neq \mathrm{K}$) [en partícula no masiva : $m_o = 0$, por lo tanto : $\mathrm{E}_o = 0$]

Nota : $\mathrm{E}^2 - \mathbf{P}^2 c^2 = m^2 f^2 c^4 (1 - \mathbf{v}^2/c^2)$ [en partícula masiva : $f^2 (1 - \mathbf{v}^2/c^2) = 1 \rightarrow \mathrm{E}^2 - \mathbf{P}^2 c^2 = {m_o}^2 c^4$ y $m \neq 0$] & [en partícula no masiva : $\mathbf{v}^2 = c^2 \rightarrow (1 - \mathbf{v}^2/c^2) = 0 \rightarrow \mathrm{E}^2 - \mathbf{P}^2 c^2 = 0$ y $m \neq 0$]

Observaciones Generales

En mecánica clásica, la energía cinética (K) de una partícula masiva (m_o) está dada por la siguiente integral indefinida : K $= \int m_o \, \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \; = \; {}^1\!/_2 \, m_o \, v^2 +$ constante

En relatividad especial, la energía cinética (K) de una partícula masiva (m_o) está dada por la siguiente integral indefinida : K $= \int m_o \, \bar{\mathbf{a}} \cdot d\mathbf{r} \; = \; m_o \, f \, c^2 +$ constante

Existen dos criterios para asignarle un valor a la constante de integración de la energía cinética. El primer criterio establece que la constante de integración debe ser tal que la energía cinética de cualquier partícula masiva en reposo debe ser siempre cero y el segundo criterio establece simplemente que la constante de integración debe ser siempre cero.

En mecánica clásica, ambos criterios llegan al mismo resultado : ($\mathrm{K} \doteq {}^1\!/_2 \; m_o \, v^2$) Sin embargo, en relatividad especial, el primer y segundo criterio llegan a resultados diferentes, con el primer criterio : ($\mathrm{K} \doteq m_o \, f \, c^2 - m_o \, c^2$) y con el segundo criterio : ($\mathrm{K} \doteq m_o \, f \, c^2$)

Ambos criterios son arbitrarios puesto que (en mecánica clásica y en relatividad especial) la energía cinética de una partícula depende de la velocidad de la partícula y también de la masa de la partícula. Por ejemplo, una partícula A puede tener más energía cinética que otra partícula B cuya velocidad es muy superior a la velocidad de la partícula A.

Usar el primer criterio simplemente porque este tipo de energía es identificado con el adjetivo 'cinética' (perteneciente al movimiento) es aún más arbitrario, puesto que este tipo de energía estaría mejor identificado si se lo llamara, por ejemplo : energía masa-velocidad.

Por otro lado, según este trabajo, cada tipo de energía está asociado con un tipo de fuerza. Si se usa el segundo criterio de integración entonces la energía cinética (K) estaría asociada con la fuerza cinética neta ($\mathbf{K}$) (ver Anexo II) Sin embargo, si se usa el primer criterio de integración entonces la energía cinética (K) estaría también asociada con la fuerza cinética neta ($\mathbf{K}$) pero la energía en reposo (E_o) estaría asociada con otro tipo de fuerza que actuaría solamente sobre las partículas masivas y cuyo valor sería siempre cero.

A lo largo de este trabajo se usará el segundo criterio de integración (porque es el más sencillo de utilizar desde un punto de vista teórico) Por lo tanto, en relatividad especial, la energía cinética (K_o) de una partícula masiva en reposo es ($m_o \, c^2$) puesto que usando el segundo criterio de integración la energía cinética y la energía relativista de una partícula masiva o no masiva son lo mismo ($\mathrm{K} \doteq m \, f \, c^2 = \mathrm{E}$) { [1] [2] [3] [Anexo I] [Anexo II] }

Finalmente (ver Anexo I) la energía relativista generalizada (E) y la energía total (T) de un sistema de partículas (masivas y no masivas) son definidas. Aquí, por ejemplo, un sistema de partículas compuesto solamente por una simple partícula masiva o no masiva puede tener energía no cinética (también llamada energía 'potencial') (en este ejemplo : $\sum \mathrm{E}_{\mathrm{nke}}$)

Por otro lado, en sistemas masivos (de partículas) aparentemente existen al menos dos tipos de velocidades ordinarias : ($\mathbf{V}_{\mathrm{E}} \doteq \mathbf{P} c^2 \, \mathrm{E}^{-1}$) [19] y ($\mathbf{V}_{\mathrm{K}} \doteq \mathbf{P} c^2 \, \mathrm{K}^{-1}$) donde ($\mathrm{K} \doteq \sum m_i \, f_i \, c^2$) $\rightarrow$ ($\mathbf{V}_{\mathrm{E}} \, \mathrm{E} = \mathbf{V}_{\mathrm{K}} \, \mathrm{K}$) ($\mathbf{V}_{\mathrm{E}} = \mathbf{V}_{\mathrm{K}} \, \varepsilon$) ($\varepsilon \doteq \mathrm{K} / \mathrm{E}$) . En este trabajo, se usará : ($\mathbf{V}_{\mathrm{E}}$) ($\mathbf{V}_{\mathrm{E}} = \mathbf{V}$)

Referencias & Bibliografía

[1] **A. Tobla**, Una Reformulación de la Relatividad Especial, (2024). (ark)

[2] **A. Torassa**, Relatividad Especial: Tipos de Fuerzas, (2024). (ark)

[3] **A. Torassa**, Relatividad Especial: Centro de Masa-Energía, (2025). (ark)

[A] **C. Møller**, La Teoría de Relatividad, (1952).

[B] **W. Pauli**, Teoría de Relatividad, (1958).

Anexo I

Sistema de Partículas

En relatividad especial, las definiciones de la energía relativista generalizada (E) la energía total (T) el momento lineal ($\mathbf{P}$) la masa en reposo (M_o) y la velocidad ($\mathbf{V}$) de un sistema (de partículas) masivo o no masivo, están dados por:

$$\mathrm{E} \doteq \sum m_i\, f_i\, c^2 + \sum \mathrm{E_{nki}} \tag{15}$$

$$\mathrm{T} \doteq \sum m_i\, f_i\, c^2 + \sum \mathrm{E_{nki}} + \sum \mathrm{E_{nke}} \tag{16}$$

$$\mathbf{P} \doteq \sum m_i\, f_i\, \mathbf{v}_i \tag{17}$$

$$\mathrm{M}_o^2\, c^4 \doteq \mathrm{E}^2 - \mathbf{P}^2 c^2 \tag{18}$$

$$\mathbf{V} \doteq \mathbf{P}\, c^2\, \mathrm{E}^{-1} \tag{19}$$

donde (m_i, f_i, $\mathbf{v}_i$) son la masa intrínseca, el factor relativista y la velocidad de la i-ésima partícula masiva o no masiva del sistema, ($\sum \mathrm{E_{nki}}$) es la energía no cinética total del sistema que contribuye a la masa en reposo (M_o) del sistema, ($\sum \mathrm{E_{nke}}$) es la energía no cinética total del sistema que no contribuye a la masa en reposo (M_o) del sistema y (c) es la velocidad de la luz en el vacío. Nota : en sistemas no masivos : ($\sum \mathrm{E_{nki}} = 0$)

La masa intrínseca (M) y el factor relativista (F) de un sistema masivo (compuesto por partículas masivas o partículas no masivas, o ambas a la vez) están dados por:

$$\mathrm{M} \doteq \mathrm{M}_o \tag{20}$$

$$\mathrm{F} \doteq \left(1 - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{21}$$

donde (M_o) es la masa en reposo del sistema masivo, ($\mathbf{V}$) es la velocidad del sistema masivo y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

La masa intrínseca (M) y el factor relativista (F) de un sistema no masivo (compuesto sólo por partículas no masivas, todas con la misma velocidad vectorial $\mathbf{c}$) están dados por:

$$\mathrm{M} \doteq \frac{h\,\kappa\,n}{c^2} \tag{22}$$

$$\mathrm{F} \doteq \frac{1}{\kappa\,n} \sum \nu_i \tag{23}$$

donde (h) es la constante de Planck, (ν_i) es la frecuencia de la i-ésima partícula no masiva del sistema no masivo, (κ) es una constante universal positiva con dimensión de frecuencia, (n) es la cantidad de partículas no masivas del sistema no masivo y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

Un sistema masivo ($\mathrm{M}_o \neq 0$) es un sistema con masa en reposo no nula (o un sistema cuya velocidad V en el vacío es menor que c) y un sistema no masivo ($\mathrm{M}_o = 0$) es un sistema con masa en reposo nula (o un sistema cuya velocidad V en el vacío es c)

Nota : La masa en reposo (M_o) y la masa intrínseca (M) son en general no aditivas y la masa relativista ($\mathtt{M}$) de un sistema (masivo o no masivo) está dada por : ($\mathtt{M} \doteq \mathrm{M\,F}$)

Cinemática Einsteniana

La posición especial ($\bar{\mathbf{R}}$) la velocidad especial ($\bar{\mathbf{V}}$) y la aceleración especial ($\bar{\mathbf{A}}$) de un sistema (masivo o no masivo) están dadas por:

$$\bar{\mathbf{R}} \doteq \int \mathrm{F}\,\mathbf{V}\,dt \tag{24}$$

$$\bar{\mathbf{V}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt} = \mathrm{F}\,\mathbf{V} \tag{25}$$

$$\bar{\mathbf{A}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \mathrm{F}\,\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\mathrm{F}}{dt}\,\mathbf{V} \tag{26}$$

donde (F) es el factor relativista del sistema, ($\mathbf{V}$) es la velocidad del sistema y (t) es el tiempo (coordenado)

Dinámica Einsteniana

Sea un sistema (masivo o no masivo) con masa intrínseca (M) entonces el momento lineal ($\mathbf{P}$) del sistema, el momento angular ($\mathbf{L}$) del sistema, la fuerza einsteniana neta ($\mathbf{F}$) que actúa sobre el sistema, el trabajo (W) realizado por las fuerzas einstenianas netas que actúan sobre el sistema, la energía cinética (K) del sistema, la energía relativista generalizada (E) del sistema y la energía total (T) del sistema, están dados por:

$$\mathbf{P} \doteq \sum \mathbf{p}_i = \sum m_i\,\bar{\mathbf{v}}_i = \sum m_i\,f_i\,\mathbf{v}_i = \mathrm{M}\,\bar{\mathbf{V}} = \mathrm{M}\,\mathrm{F}\,\mathbf{V} \tag{27}$$

$$\mathbf{L} \doteq \sum \mathbf{l}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum m_i\,\mathbf{r}_i \times \bar{\mathbf{v}}_i = \sum m_i\,f_i\,\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \tag{28}$$

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{f}_i = \sum \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathrm{M}\,\bar{\mathbf{A}} = \mathrm{M}\left[\mathrm{F}\,\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\mathrm{F}}{dt}\,\mathbf{V}\right] \tag{29}$$

$$\mathrm{W} \doteq \sum \int_1^2 \mathbf{f}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum \int_1^2 \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot d\mathbf{r}_i = \Delta\,\mathrm{K} \tag{30}$$

$$\mathrm{K} \doteq \sum m_i\,f_i\,c^2 \tag{31}$$

$$\mathrm{E} \doteq \sum m_i\,f_i\,c^2 + \sum \mathrm{E}_{\mathrm{nki}} = \mathrm{K} + \sum \mathrm{E}_{\mathrm{nki}} = \mathrm{M}\,\mathrm{F}\,c^2 \tag{32}$$

$$\mathrm{T} \doteq \sum m_i\,f_i\,c^2 + \sum \mathrm{E}_{\mathrm{nki}} + \sum \mathrm{E}_{\mathrm{nke}} = \mathrm{M}\,\mathrm{F}\,c^2 + \sum \mathrm{E}_{\mathrm{nke}} \tag{33}$$

donde (m_i, f_i, $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{v}_i$, $\bar{\mathbf{v}}_i$) son la masa intrínseca, el factor relativista, la posición, la velocidad y la velocidad especial de la i-ésima partícula masiva o no masiva del sistema, (F, $\mathbf{V}$, $\bar{\mathbf{V}}$, $\bar{\mathbf{A}}$) son el factor relativista, la velocidad, la velocidad especial y la aceleración especial del sistema, ($\sum \mathrm{E}_{\mathrm{nki}}$) es la energía no cinética total del sistema que contribuye a la masa en reposo (M_o) del sistema, ($\sum \mathrm{E}_{\mathrm{nke}}$) es la energía no cinética total del sistema que no contribuye a la masa en reposo (M_o) del sistema, (t) es el tiempo (coordenado) y finalmente (c) es la velocidad de la luz en el vacío. Nota : ($\sum \mathrm{E}_{\mathrm{nki}} = 0$) en partícula masiva o no masiva $\rightarrow$ ($\mathrm{E} = \mathrm{K}$) en partícula masiva o no masiva | Alternativa (usando el primer criterio de integración) : $\mathrm{K} \doteq \sum (\,m_i\,f_i\,c^2 - m_{oi}\,c^2\,)$, $\mathrm{E}_{\dot{o}} \doteq \sum m_{oi}\,c^2$, $\mathrm{E} \doteq \mathrm{K} + \mathrm{E}_{\dot{o}}$, $\mathrm{G} \doteq \mathrm{E} + \sum \mathrm{E}_{\mathrm{nri}} = \mathrm{M}\,\mathrm{F}\,c^2$

Anexo II

Fuerzas Cinéticas

La fuerza cinética $\mathbf{K}^a_{ij}$ ejercida sobre una partícula i con masa intrínseca m_i por otra partícula j con masa intrínseca m_j, está dada por:

$$\mathbf{K}^a_{ij} \;=\; - \left[\; \frac{m_i \, m_j}{\mathbb{M}} \, (\, \bar{\mathbf{a}}_i \, - \, \bar{\mathbf{a}}_j \,) \; \right] \tag{34}$$

donde $\bar{\mathbf{a}}_i$ es la aceleración especial de la partícula i, $\bar{\mathbf{a}}_j$ es la aceleración especial de la partícula j y $\mathbb{M}$ ($= \sum_z^{All} m_z$) es la suma de las masas intrínsecas de todas las partículas del Universo.

Por otro lado, la fuerza cinética $\mathbf{K}^u_i$ ejercida sobre una partícula i con masa intrínseca m_i por el Universo, está dada por:

$$\mathbf{K}^u_i \;=\; - \, m_i \; \frac{\sum_z^{All} m_z \, \bar{\mathbf{a}}_z}{\sum_z^{All} m_z} \tag{35}$$

donde m_z y $\bar{\mathbf{a}}_z$ son la masa intrínseca y la aceleración especial de la z-ésima partícula del Universo.

De las ecuaciones anteriores se deduce que la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ ($= \sum_j^{All} \mathbf{K}^a_{ij} \, + \, \mathbf{K}^u_i$) que actúa sobre una partícula i con masa intrínseca m_i, está dada por:

$$\mathbf{K}_i \;=\; - \, m_i \, \bar{\mathbf{a}}_i \tag{36}$$

donde $\bar{\mathbf{a}}_i$ es la aceleración especial de la partícula i.

Ahora, desde la dinámica einsteniana [10] se tiene:

$$\mathbf{F}_i \;=\; m_i \, \bar{\mathbf{a}}_i \tag{37}$$

Dado que ($\mathbf{K}_i \;=\; - \, m_i \, \bar{\mathbf{a}}_i$) se obtiene:

$$\mathbf{F}_i \;=\; - \, \mathbf{K}_i \tag{38}$$

o sea:

$$\mathbf{K}_i \, + \, \mathbf{F}_i \;=\; 0 \tag{39}$$

Si ($\mathbf{T}_i \doteq \mathbf{K}_i \, + \, \mathbf{F}_i$) entonces:

$$\mathbf{T}_i \;=\; 0 \tag{40}$$

Por lo tanto, si la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ es incluida en la dinámica einsteniana entonces la fuerza total $\mathbf{T}_i$ que actúa sobre una (masiva o no masiva) partícula i es siempre cero.

Nota : Las fuerzas cinéticas $\overset{au}{\mathbf{K}}$ están directamente relacionadas con la energía cinética K.