Relatividad Especial: Tipos de Fuerzas

A. Torassa

ORCID § (2024) Buenos Aires
Argentina

En relatividad especial, este trabajo presenta cuatro fuerzas netas, que pueden ser aplicadas en cualquier partícula masiva o no masiva y donde la relación entre fuerza neta y aceleración especial es como en la segunda ley de Newton (es decir, la fuerza neta que actúa sobre una partícula masiva o no masiva siempre tiene igual dirección y sentido que la aceleración especial de la partícula)

Introducción

En relatividad especial, este trabajo se desarrolla a partir de las definiciones esenciales de masa intrínseca (o masa invariante) y factor relativista (o factor frecuencia) para partículas masivas y partículas no masivas.

La masa intrínseca (m) y el factor relativista (f) de una partícula masiva, están dados por:

$$m \doteq m_o \tag{1}$$

$$f \doteq \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{2}$$

donde (m_o) es la masa en reposo de la partícula masiva, $(\mathbf{v})$ es la velocidad de la partícula masiva y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

La masa intrínseca (m) y el factor relativista (f) de una partícula no masiva, están dados por:

$$m \doteq \frac{h\,\kappa}{c^2} \tag{3}$$

$$f \doteq \frac{\nu}{\kappa} \tag{4}$$

donde (h) es la constante de Planck, (ν) es la frecuencia de la partícula no masiva, (κ) es una constante universal positiva con dimensión de frecuencia y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

Según este trabajo, una partícula masiva $(m_o \neq 0)$ es una partícula con masa en reposo no nula (o una partícula cuya velocidad v en el vacío es menor que c) y una partícula no masiva $(m_o = 0)$ es una partícula con masa en reposo nula (o una partícula cuya velocidad v en el vacío es c)

Nota : La masa en reposo (m_o) y la masa intrínseca (m) son en general no aditivas y la masa relativista (m) de una partícula (masiva o no masiva) está dada por : $(\mathrm{m} \doteq m\,f)$

Cinemática Einsteniana

La posición especial ($\bar{\mathbf{r}}$) la velocidad especial ($\bar{\mathbf{v}}$) y la aceleración especial ($\bar{\mathbf{a}}$) de una partícula (masiva o no masiva) están dadas por:

$$\bar{\mathbf{r}} \doteq \int f\,\mathbf{v}\,dt \tag{5}$$

$$\bar{\mathbf{v}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = f\,\mathbf{v} \tag{6}$$

$$\bar{\mathbf{a}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = f\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{df}{dt}\,\mathbf{v} \tag{7}$$

donde (f) es el factor relativista de la partícula, ($\mathbf{v}$) es la velocidad de la partícula y (t) es el tiempo (coordenado)

Dinámica Einsteniana

Sea una partícula (masiva o no masiva) con masa intrínseca (m) entonces el momento lineal ($\mathbf{P}$) de la partícula, el momento angular ($\mathbf{L}$) de la partícula, la fuerza einsteniana neta ($\mathbf{F}_{\text{E}}$) que actúa sobre la partícula, el trabajo (W) realizado por la fuerza einsteniana neta que actúa sobre la partícula y la energía cinética (K) de la partícula, están dados por:

$$\mathbf{P} \doteq m\,\bar{\mathbf{v}} = m\,f\,\mathbf{v} \tag{8}$$

$$\mathbf{L} \doteq \mathbf{r}\times\mathbf{P} = m\,\mathbf{r}\times\bar{\mathbf{v}} = m\,f\,\mathbf{r}\times\mathbf{v} \tag{9}$$

$$\mathbf{F}_{\text{E}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\,\bar{\mathbf{a}} = m\left[f\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{df}{dt}\,\mathbf{v}\right] \tag{10}$$

$$\text{W} \doteq \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{E}}\cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \frac{d\mathbf{P}}{dt}\cdot d\mathbf{r} = \Delta\,\text{K} \tag{11}$$

$$\text{K} \doteq m\,f\,c^2 \tag{12}$$

donde (f, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{\mathbf{a}}$) son el factor relativista, la posición, la velocidad, la velocidad especial y la aceleración especial de la partícula, (t) es el tiempo (coordenado) y (c) es la velocidad de la luz en el vacío. La energía cinética (K_o) de una partícula masiva en reposo es ($m_o\,c^2$) puesto que en esta dinámica la energía relativista ($\text{E} \doteq m_o\,c^2\,(\,f-1\,) + m_o\,c^2$) y la energía cinética ($\text{K} \doteq m\,f\,c^2$) son lo mismo ($\text{E} = \text{K}$) [1]

Nota : $\text{E}^2 - \mathbf{P}^2c^2 = m^2\,f^2\,c^4\,(\,1-\mathbf{v}^2/c^2\,)$ [en partícula masiva : $f^2\,(\,1-\mathbf{v}^2/c^2\,) = 1 \rightarrow \text{E}^2 - \mathbf{P}^2c^2 = m_o{}^2c^4$ y $m \neq 0$] & [en partícula no masiva : $\mathbf{v}^2 = c^2 \rightarrow (\,1-\mathbf{v}^2/c^2\,) = 0 \rightarrow \text{E}^2 - \mathbf{P}^2c^2 = 0$ y $m \neq 0$]

En relatividad especial hay 3 tipos de masas: masa en reposo (m_o) masa intrínseca (m) y masa relativista (m)

Cinemática Newtoniana

La posición especial $(\bar{\mathbf{r}})$ la velocidad especial $(\bar{\mathbf{v}})$ y la aceleración especial $(\bar{\mathbf{a}})$ de una partícula (masiva o no masiva) están dadas por:

$$\bar{\mathbf{r}} \doteq \mathbf{r} \tag{13}$$

$$\bar{\mathbf{v}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{v} \tag{14}$$

$$\bar{\mathbf{a}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \mathbf{a} \tag{15}$$

donde $(\mathbf{r})$ es la posición de la partícula, $(\mathbf{v})$ es la velocidad de la partícula, $(\mathbf{a})$ es la aceleración de la partícula y (t) es el tiempo (coordenado)

Dinámica Newtoniana

Sea una partícula (masiva o no masiva) con masa intrínseca (m) entonces el momento lineal $(\mathbf{P})$ de la partícula, el momento angular $(\mathbf{L})$ de la partícula, la fuerza newtoniana neta $(\mathbf{F}_{\mathrm{N}})$ que actúa sobre la partícula, el trabajo (W) realizado por la fuerza newtoniana neta que actúa sobre la partícula y la energía cinética (K) de la partícula, están dados por:

$$\mathbf{P} \doteq m\,\bar{\mathbf{v}} = m\,\mathbf{v} \tag{16}$$

$$\mathbf{L} \doteq \mathbf{r} \times \mathbf{P} = m\,\mathbf{r} \times \bar{\mathbf{v}} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{17}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{N}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\,\bar{\mathbf{a}} = m\,\mathbf{a} \tag{18}$$

$$\mathrm{W} \doteq \int_1^2 \mathbf{F}_{\mathrm{N}} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \Delta\,\mathrm{K} \tag{19}$$

$$\mathrm{K} \doteq {}^1\!/_2\, m\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \tag{20}$$

donde $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{a}})$ son la posición, la velocidad, la aceleración, la velocidad especial y la aceleración especial de la partícula, (t) es el tiempo (coordenado) y (c) es la velocidad de la luz en el vacío. La energía cinética (K_o) de una partícula masiva en reposo es cero y la fuerza newtoniana neta $(\mathbf{F}_{\mathrm{N}})$ siempre tiene también igual dirección y sentido que la aceleración ordinaria $(\mathbf{a})$ de la partícula masiva o no masiva.

En relatividad especial, la fuerza newtoniana neta $(\mathbf{F}_{\mathrm{N}})$ que actúa sobre una partícula masiva o no masiva, está dada por : $\mathbf{F}_{\mathrm{N}} \doteq \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{E}}$, donde $(\mathbf{N})$ es el tensor de Newton y $(\mathbf{F}_{\mathrm{E}})$ es la fuerza einsteniana neta que actúa sobre la partícula masiva o no masiva [2]

Cinemática Poincariana

La posición especial ($\bar{\mathbf{r}}$) la velocidad especial ($\bar{\mathbf{v}}$) y la aceleración especial ($\bar{\mathbf{a}}$) de una partícula (masiva o no masiva) están dadas por:

$$\bar{\mathbf{r}} \doteq \mathbf{r} \tag{21}$$

$$\bar{\mathbf{v}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{d\tau} = f\,\mathbf{v} \tag{22}$$

$$\bar{\mathbf{a}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{d\tau} = f\left[f\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{df}{dt}\,\mathbf{v}\right] \tag{23}$$

donde (f) es el factor relativista de la partícula, ($\mathbf{r}$) es la posición de la partícula, ($\mathbf{v}$) es la velocidad de la partícula y (τ) es el tiempo propio de la partícula (Nota : $d\tau = f^{-1}\,dt$)

Dinámica Poincariana

Sea una partícula (masiva o no masiva) con masa intrínseca (m) entonces el momento lineal ($\mathbf{P}$) de la partícula, el momento angular ($\mathbf{L}$) de la partícula, la fuerza poincariana neta ($\mathbf{F}_{\mathrm{P}}$) que actúa sobre la partícula, el trabajo (W) realizado por la fuerza poincariana neta que actúa sobre la partícula y la energía cinética (K) de la partícula, están dados por:

$$\mathbf{P} \doteq m\,\bar{\mathbf{v}} = m\,f\,\mathbf{v} \tag{24}$$

$$\mathbf{L} \doteq \mathbf{r}\times\mathbf{P} = m\,\mathbf{r}\times\bar{\mathbf{v}} = m\,f\,\mathbf{r}\times\mathbf{v} \tag{25}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{P}} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = m\,\bar{\mathbf{a}} = m\,f\left[f\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{df}{dt}\,\mathbf{v}\right] \tag{26}$$

$$\mathrm{W} \doteq \int_1^2 f^{-1}\,\mathbf{F}_{\mathrm{P}}\cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 f^{-1}\,\frac{d\mathbf{P}}{d\tau}\cdot d\mathbf{r} = \Delta\,\mathrm{K} \tag{27}$$

$$\mathrm{K} \doteq m\,f\,c^2 \tag{28}$$

donde (f, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, τ, $\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{\mathbf{a}}$) son el factor relativista, la posición, la velocidad, el tiempo propio, la velocidad especial y la aceleración especial de la partícula y (c) es la velocidad de la luz en el vacío. La energía cinética (K_o) de una partícula masiva en reposo es ($m_o\,c^2$) puesto que también en esta dinámica la energía relativista ($\mathrm{E} \doteq m_o\,c^2\,(\,f-1\,)+m_o\,c^2$) y la energía cinética ($\mathrm{K} \doteq m\,f\,c^2$) son lo mismo ($\mathrm{E} = \mathrm{K}$)

En relatividad especial, la fuerza poincariana neta ($\mathbf{F}_{\mathrm{P}}$) que actúa sobre una partícula masiva o no masiva, está dada por : $\mathbf{F}_{\mathrm{P}} \doteq f\;\mathbf{F}_{\mathrm{E}}$, donde (f) es el factor relativista de la partícula y ($\mathbf{F}_{\mathrm{E}}$) es la fuerza einsteniana neta que actúa sobre la partícula masiva o no masiva [3]

Cinemática Mølleriana

La posición especial ($\bar{\mathbf{r}}$) la velocidad especial ($\bar{\mathbf{v}}$) y la aceleración especial ($\bar{\mathbf{a}}$) de una partícula (masiva o no masiva) están dadas por:

$$\bar{\mathbf{r}} \doteq \int \mathbf{v}\, d\tau \tag{29}$$

$$\bar{\mathbf{v}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{d\tau} = \mathbf{v} \tag{30}$$

$$\bar{\mathbf{a}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{d\tau} = f\,\mathbf{a} \tag{31}$$

donde (f) es el factor relativista de la partícula, ($\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$) son la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula y (τ) es el tiempo propio de la partícula (Nota : $d\tau = f^{-1}\, dt$)

Dinámica Mølleriana

Sea una partícula (masiva o no masiva) con masa intrínseca (m) entonces el momento lineal ($\mathbf{P}$) de la partícula, el momento angular ($\mathbf{L}$) de la partícula, la fuerza mølleriana neta ($\mathbf{F}_{\mathrm{M}}$) que actúa sobre la partícula, el trabajo (W) realizado por la fuerza mølleriana neta que actúa sobre la partícula y la energía cinética (K) de la partícula, están dados por:

$$\mathbf{P} \doteq m\,\bar{\mathbf{v}} = m\,\mathbf{v} \tag{32}$$

$$\mathbf{L} \doteq \mathbf{r} \times \mathbf{P} = m\,\mathbf{r} \times \bar{\mathbf{v}} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{33}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{M}} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = m\,\bar{\mathbf{a}} = m\,f\,\mathbf{a} \tag{34}$$

$$\mathrm{W} \doteq \int_1^2 f^{-1}\,\mathbf{F}_{\mathrm{M}} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 f^{-1}\,\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} \cdot d\mathbf{r} = \Delta\,\mathrm{K} \tag{35}$$

$$\mathrm{K} \doteq {}^1\!/_2\; m\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \tag{36}$$

donde (f, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, τ, $\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{\mathbf{a}}$) son el factor relativista, la posición, la velocidad, la aceleración, el tiempo propio, la velocidad especial y la aceleración especial de la partícula y (c) es la velocidad de la luz en el vacío. La energía cinética (K_o) de una partícula masiva en reposo es cero y la fuerza mølleriana neta ($\mathbf{F}_{\mathrm{M}}$) siempre tiene también igual dirección y sentido que la aceleración ordinaria ($\mathbf{a}$) de la partícula masiva o no masiva.

En relatividad especial, la fuerza mølleriana neta ($\mathbf{F}_{\mathrm{M}}$) que actúa sobre una partícula masiva o no masiva, está dada por : $\mathbf{F}_{\mathrm{M}} \doteq \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{E}}$, donde ($\mathbf{M}$) es el tensor de Møller y ($\mathbf{F}_{\mathrm{E}}$) es la fuerza einsteniana neta que actúa sobre la partícula masiva o no masiva (ver Anexo I) [4]

Observaciones Generales

En relatividad especial, las fuerzas netas [$\mathbf{F}_{\mathrm{N}}, \mathbf{F}_{\mathrm{P}}, \mathbf{F}_{\mathrm{M}}$] son válidas puesto que estas fuerzas netas son obtenidas a partir de la fuerza einsteniana neta [$\mathbf{F}_{\mathrm{E}}$]

Por lo tanto, las fuerzas netas [$\mathbf{F}_{\mathrm{E}}, \mathbf{F}_{\mathrm{N}}, \mathbf{F}_{\mathrm{P}}, \mathbf{F}_{\mathrm{M}}$] pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial.

Las fuerzas netas [$\mathbf{F}_{\mathrm{E}}, \mathbf{F}_{\mathrm{N}}, \mathbf{F}_{\mathrm{P}}, \mathbf{F}_{\mathrm{M}}$] que actúan sobre una partícula (masiva o no masiva) siempre tienen igual dirección y sentido que la aceleración especial ($\bar{\mathbf{a}}$) de la partícula (como en la 2ª ley de Newton)

Adicionalmente, las fuerzas netas [$\mathbf{F}_{\mathrm{N}}, \mathbf{F}_{\mathrm{M}}$] que actúan sobre una partícula (masiva o no masiva) siempre tienen también igual dirección y sentido que la aceleración ordinaria ($\mathbf{a}$) de la partícula (exactamente como en la 2ª ley de Newton) (Nota : $\mathbf{F}_{\mathrm{N}} = f^{-1}\, \mathbf{F}_{\mathrm{M}} = f^{-1}\, \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{E}}$)

Las fuerzas netas [$\mathbf{F}_{\mathrm{E}}, \mathbf{F}_{\mathrm{N}}, \mathbf{F}_{\mathrm{P}}, \mathbf{F}_{\mathrm{M}}$] son trifuerzas (es decir, son vectores tridimensionales)

Por otro lado, la cuadrifuerza minkowskiana neta [$\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{M}}$] es obtenida a partir del cuadrimomento y el tiempo propio de una partícula masiva y la cuadrifuerza einsteniana neta [$\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{E}}$] puede ser obtenida a partir del cuadrimomento y el tiempo (coordenado) de una partícula masiva (Nota : $\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{E}} = ((d\mathrm{E}/dt)\, c^{-1} , \mathbf{F}_{\mathrm{E}})$ y $\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{M}} = f\ \overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{E}}$) [ver : Apéndice A y Apéndice B]

En relatividad especial, hay tres tipos de masas que son compatibles entre sí : la masa en reposo (m_o) la masa intrínseca (m) y la masa relativista (m) (la masa intrínseca (m) es una masa invariante que puede ser aplicada en partículas masivas y no masivas)

En la dinámica poincariana, la definición de trabajo (W) ha sido modificada para que las magnitudes ($\mathbf{P}, \mathrm{K}$) coincidan con las magnitudes ($\mathbf{P}, \mathrm{K}$) de la dinámica einsteniana.

En la dinámica mølleriana, la definición de trabajo (W) ha sido modificada para que las magnitudes ($\mathbf{P}, \mathrm{K}$) coincidan con las magnitudes ($\mathbf{P}, \mathrm{K}$) de la dinámica newtoniana.

Adicionalmente, en las colisiones elásticas relativistas (o choques elásticos relativistas) entre partículas masivas y/o no masivas de un sistema aislado, las magnitudes ($\mathbf{P} = \sum m_i\, f_i\, \mathbf{v}_i$) y ($\mathrm{K} = \sum m_i\, f_i\, c^2$) se conservan [y la fuerza einsteniana neta ($\mathbf{F}_{\mathrm{E}} = d\mathbf{P}/dt$) siempre es cero]

Referencias & Bibliografía

[1] **A. Tobla**, Una Reformulación de la Relatividad Especial, (2024). (ark)

[2] **A. Blato**, Relatividad Especial & Segunda Ley de Newton, (2016). (ark)

[3] **A. Blato**, Una Nueva Dinámica en Relatividad Especial, (2016). (ark)

[4] **C. Møller**, La Teoría de Relatividad, (1952).

[A] **W. Pauli**, Teoría de Relatividad, (1958).

[B] **A. French**, Relatividad Especial, (1968).

Anexo I

Tensor de Møller

El tensor de Møller ($\mathbf{M}$) y la fuerza mølleriana neta ($\mathbf{F}_{\mathrm{M}}$) pueden ser obtenidos a partir de la fuerza einsteniana neta ($\mathbf{F}_{\mathrm{E}}$) actuando sobre una partícula masiva con masa en reposo (m_o)

$$m_o \left[\frac{\mathbf{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right] \;=\; \mathbf{F}_{\mathrm{E}} \tag{37}$$

$$m_o \left[\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right] \;=\; \mathbf{F}_{\mathrm{E}}\cdot\mathbf{v} \tag{38}$$

$$m_o \left[\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}}{c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right] \;=\; \frac{(\mathbf{F}_{\mathrm{E}}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}}{c^2} \tag{39}$$

$$m_o \left[\frac{\mathbf{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right] \;=\; \mathbf{F}_{\mathrm{E}} - \frac{(\mathbf{F}_{\mathrm{E}}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}}{c^2} \tag{40}$$

$$m_o \left[\frac{\mathbf{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right] \;=\; \mathbf{1}\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{E}} - \frac{(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{E}}}{c^2} \tag{41}$$

$$m_o \left[\frac{\mathbf{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right] \;=\; \left[\mathbf{1} - \frac{(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})}{c^2} \right]\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{E}} \tag{42}$$

$$m_o \left[\frac{\mathbf{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right] \;=\; \mathbf{M}\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{E}} \tag{43}$$

$$m_o \left[\frac{\mathbf{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right] \;=\; \mathbf{F}_{\mathrm{M}} \tag{44}$$

Nota : $\mathbf{F}_{\mathrm{E}} = \mathbf{1}\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{E}}$ ($\mathbf{1}$ tensor unitario) y $(\mathbf{F}_{\mathrm{E}}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} = (\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{E}}$ ($\otimes$ producto tensorial o diádico)

Anexo II

Fuerzas Cinéticas

La fuerza cinética $\mathbf{K}^a_{ij}$ ejercida sobre una partícula i con masa intrínseca m_i por otra partícula j con masa intrínseca m_j, está dada por:

$$\mathbf{K}^a_{ij} \;=\; - \left[\; \frac{m_i \, m_j}{\mathbb{M}} \, (\, \bar{\mathbf{a}}_i \, - \, \bar{\mathbf{a}}_j \,) \; \right] \tag{45}$$

donde $\bar{\mathbf{a}}_i$ es la aceleración especial de la partícula i, $\bar{\mathbf{a}}_j$ es la aceleración especial de la partícula j y $\mathbb{M}$ ($= \sum_z^{All} m_z$) es la suma de las masas intrínsecas de todas las partículas del Universo.

Por otro lado, la fuerza cinética $\mathbf{K}^u_i$ ejercida sobre una partícula i con masa intrínseca m_i por el Universo, está dada por:

$$\mathbf{K}^u_i \;=\; - \, m_i \, \frac{\sum_z^{All} m_z \, \bar{\mathbf{a}}_z}{\sum_z^{All} m_z} \tag{46}$$

donde m_z y $\bar{\mathbf{a}}_z$ son la masa intrínseca y la aceleración especial de la z-ésima partícula del Universo.

De las ecuaciones anteriores se deduce que la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ ($= \sum_j^{All} \mathbf{K}^a_{ij} \, + \, \mathbf{K}^u_i$) que actúa sobre una partícula i con masa intrínseca m_i, está dada por:

$$\mathbf{K}_i \;=\; - \, m_i \, \bar{\mathbf{a}}_i \tag{47}$$

donde $\bar{\mathbf{a}}_i$ es la aceleración especial de la partícula i.

Ahora, desde todas las dinámicas [(10), (18), (26), (34)] se tiene:

$$\mathbf{F}_i \;=\; m_i \, \bar{\mathbf{a}}_i \tag{48}$$

Dado que ($\mathbf{K}_i \;=\; - \, m_i \, \bar{\mathbf{a}}_i$) se obtiene:

$$\mathbf{F}_i \;=\; - \, \mathbf{K}_i \tag{49}$$

o sea:

$$\mathbf{K}_i \, + \, \mathbf{F}_i \;=\; 0 \tag{50}$$

Si ($\mathbf{T}_i \doteq \mathbf{K}_i \, + \, \mathbf{F}_i$) entonces:

$$\mathbf{T}_i \;=\; 0 \tag{51}$$

Por lo tanto, si la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ es incluida en todas las dinámicas entonces la fuerza total $\mathbf{T}_i$ que actúa sobre una (masiva o no masiva) partícula i es siempre cero.

Nota : Las fuerzas cinéticas $\overset{au}{\mathbf{K}}$ están directamente relacionadas con la energía cinética K.

Anexo III

Sistema de Partículas

En relatividad especial, la energía total (E) el momento lineal ($\mathbf{P}$) la masa en reposo (M_o) y la velocidad ($\mathbf{V}$) de un sistema (de partículas) masivo o no masivo, están dados por:

$$\mathrm{E} \doteq \sum m_i\, f_i\, c^2 + \sum \mathrm{E}_{\mathrm{nki}} \tag{52}$$

$$\mathbf{P} \doteq \sum m_i\, f_i\, \mathbf{v}_i \tag{53}$$

$$\mathrm{M}_o^2\, c^4 \doteq \mathrm{E}^2 - \mathbf{P}^2 c^2 \tag{54}$$

$$\mathbf{V} \doteq \mathbf{P}\, c^2\, \mathrm{E}^{-1} \tag{55}$$

donde ($m_i,\ f_i,\ \mathbf{v}_i$) son la masa intrínseca, el factor relativista y la velocidad de la i-ésima partícula masiva o no masiva del sistema, ($\sum \mathrm{E}_{\mathrm{nki}}$) es la energía no cinética total del sistema y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

La masa intrínseca (M) y el factor relativista (F) de un sistema masivo (compuesto por partículas masivas o partículas no masivas, o ambas a la vez) están dados por:

$$\mathrm{M} \doteq \mathrm{M}_o \tag{56}$$

$$\mathrm{F} \doteq \left(1 - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{57}$$

donde (M_o) es la masa en reposo del sistema masivo, ($\mathbf{V}$) es la velocidad del sistema masivo y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

La masa intrínseca (M) y el factor relativista (F) de un sistema no masivo (compuesto sólo por partículas no masivas, todas con la misma velocidad vectorial $\mathbf{c}$) están dados por:

$$\mathrm{M} \doteq \frac{h\,\kappa}{c^2} \tag{58}$$

$$\mathrm{F} \doteq \frac{1}{\kappa} \sum \nu_i \tag{59}$$

donde (h) es la constante de Planck, (ν_i) es la frecuencia de la i-ésima partícula no masiva del sistema no masivo, (κ) es una constante universal positiva con dimensión de frecuencia y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

Un sistema masivo ($\mathrm{M}_o \neq 0$) es un sistema con masa en reposo no nula (o un sistema cuya velocidad V en el vacío es menor que c) y un sistema no masivo ($\mathrm{M}_o = 0$) es un sistema con masa en reposo nula (o un sistema cuya velocidad V en el vacío es c)

Nota : La masa en reposo (M_o) y la masa intrínseca (M) son en general no aditivas y la masa relativista ($\mathtt{M}$) de un sistema (masivo o no masivo) está dada por : ($\mathtt{M} \doteq \mathrm{M\,F}$)

Cinemática Einsteniana

La posición especial ($\bar{\mathbf{R}}$) la velocidad especial ($\bar{\mathbf{V}}$) y la aceleración especial ($\bar{\mathbf{A}}$) de un sistema (masivo o no masivo) están dadas por:

$$\bar{\mathbf{R}} \doteq \int \mathrm{F}\,\mathbf{V}\,dt \tag{60}$$

$$\bar{\mathbf{V}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt} = \mathrm{F}\,\mathbf{V} \tag{61}$$

$$\bar{\mathbf{A}} \doteq \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \mathrm{F}\,\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\mathrm{F}}{dt}\,\mathbf{V} \tag{62}$$

donde (F) es el factor relativista del sistema, ($\mathbf{V}$) es la velocidad del sistema y (t) es el tiempo (coordenado)

Dinámica Einsteniana

Sea un sistema (masivo o no masivo) con masa intrínseca (M) entonces el momento lineal ($\mathbf{P}$) del sistema, el momento angular ($\mathbf{L}$) del sistema, la fuerza einsteniana neta ($\mathbf{F}$) que actúa sobre el sistema, el trabajo (W) realizado por las fuerzas einstenianas netas que actúan sobre el sistema, la energía cinética (K) del sistema y la energía total (E) del sistema, son:

$$\mathbf{P} \doteq \sum \mathbf{p}_i = \sum m_i\,\bar{\mathbf{v}}_i = \sum m_i\,f_i\,\mathbf{v}_i = \mathrm{M}\,\bar{\mathbf{V}} = \mathrm{M}\,\mathrm{F}\,\mathbf{V} \tag{63}$$

$$\mathbf{L} \doteq \sum \mathbf{l}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum m_i\,\mathbf{r}_i \times \bar{\mathbf{v}}_i = \sum m_i\,f_i\,\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \tag{64}$$

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{f}_i = \sum \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathrm{M}\,\bar{\mathbf{A}} = \mathrm{M}\left[\mathrm{F}\,\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\mathrm{F}}{dt}\,\mathbf{V}\right] \tag{65}$$

$$\mathrm{W} \doteq \sum \int_1^2 \mathbf{f}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum \int_1^2 \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot d\mathbf{r}_i = \Delta\,\mathrm{K} \tag{66}$$

$$\mathrm{K} \doteq \sum m_i\,f_i\,c^2 \tag{67}$$

$$\mathrm{E} \doteq \sum m_i\,f_i\,c^2 + \sum \mathrm{E}_{\mathrm{nki}} = \mathrm{K} + \sum \mathrm{E}_{\mathrm{nki}} = \mathrm{M}\,\mathrm{F}\,c^2 \tag{68}$$

donde ($m_i, f_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i$) son la masa intrínseca, el factor relativista, la posición, la velocidad y la velocidad especial de la i-ésima partícula masiva o no masiva del sistema, (F, $\mathbf{V}$, $\bar{\mathbf{V}}$, $\bar{\mathbf{A}}$) son el factor relativista, la velocidad, la velocidad especial y la aceleración especial del sistema, ($\sum \mathrm{E}_{\mathrm{nki}}$) es la energía no cinética total del sistema, (t) es el tiempo (coordenado) y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

Nota : ($\sum \mathrm{E}_{\mathrm{nki}} = 0$) en partícula masiva o no masiva $\rightarrow$ (E $=$ K) en partícula masiva o no masiva.

Apéndice A

Cuadricinemática

Cinemática Minkowskiana

La cuadriposición especial (R) la cuadrivelocidad especial (U) y la cuadriaceleración especial (A) de una partícula (masiva o no masiva) están dadas por:

$$\mathsf{R} \doteq \left(c\,t \ , \ \mathbf{r} \right) \tag{69}$$

$$\mathsf{U} \doteq \frac{d\mathsf{R}}{d\tau} = \left(f\,c \ , \ f\,\mathbf{v} \right) \tag{70}$$

$$\mathsf{A} \doteq \frac{d\mathsf{U}}{d\tau} = f \left(\frac{df}{dt}\,c \ , \ \frac{df}{dt}\,\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,f \right) \tag{71}$$

donde (f) es el factor relativista de la partícula, ($\mathbf{r}$) es la posición de la partícula, ($\mathbf{v}$) es la velocidad de la partícula y (τ) es el tiempo propio de la partícula (Nota : $d\tau = f^{-1}\,dt$)

Cuadridinámica

Dinámica Minkowskiana

El cuadrimomento ($\overline{\mathbf{P}}$) de una partícula (masiva o no masiva) con masa intrínseca (m) y la cuadrifuerza minkowskiana neta ($\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{M}}$) que actúa sobre la partícula, están dados por:

$$\overline{\mathbf{P}} \doteq m\,\mathsf{U} = m \left(f\,c \ , \ f\,\mathbf{v} \right) \tag{72}$$

$$\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{M}} = \frac{d\overline{\mathbf{P}}}{d\tau} = m\,\mathsf{A} = m\,f \left(\frac{df}{dt}\,c \ , \ \frac{df}{dt}\,\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,f \right) \tag{73}$$

donde (f, $\mathbf{v}$, U, A) son el factor relativista, la velocidad, la cuadrivelocidad especial y la cuadriaceleración especial de la partícula, (τ) es el tiempo propio de la partícula y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

En la cuadrimecánica minkowskiana (es decir, en la cuadrimecánica ordinaria) todos los cuadrivectores especiales (R, U, A, $\overline{\mathbf{P}}$, $\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{M}}$) son cuadrivectores ordinarios ($\mathbf{R}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$)

Adicionalmente, en partícula masiva : f es el factor de Lorentz $\gamma(\mathbf{v})$.

Apéndice B

Cuadricinemática

Cinemática Einsteniana

La cuadriposición especial (R) la cuadrivelocidad especial (U) y la cuadriaceleración especial (A) de una partícula (masiva o no masiva) están dadas por:

$$\mathsf{R} \doteq \int \Big(f\,c \;,\; f\,\mathbf{v} \Big)\, dt \tag{74}$$

$$\mathsf{U} \doteq \frac{d\mathsf{R}}{dt} = \Big(f\,c \;,\; f\,\mathbf{v} \Big) \tag{75}$$

$$\mathsf{A} \doteq \frac{d\mathsf{U}}{dt} = \left(\frac{df}{dt}\,c \;,\; \frac{df}{dt}\,\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,f \right) \tag{76}$$

donde (f) es el factor relativista de la partícula, ($\mathbf{v}$) es la velocidad de la partícula y (t) es el tiempo (coordenado)

Cuadridinámica

Dinámica Einsteniana

El cuadrimomento ($\overline{\mathbf{P}}$) de una partícula (masiva o no masiva) con masa intrínseca (m) y la cuadrifuerza einsteniana neta ($\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{E}}$) que actúa sobre la partícula, están dados por:

$$\overline{\mathbf{P}} \doteq m\,\mathsf{U} = m \Big(f\,c \;,\; f\,\mathbf{v} \Big) \tag{77}$$

$$\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{E}} = \frac{d\overline{\mathbf{P}}}{dt} = m\,\mathsf{A} = m \left(\frac{df}{dt}\,c \;,\; \frac{df}{dt}\,\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,f \right) \tag{78}$$

donde (f, $\mathbf{v}$, U, A) son el factor relativista, la velocidad, la cuadrivelocidad especial y la cuadriaceleración especial de la partícula, (t) es el tiempo (coordenado) y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

En la cuadrimecánica einsteniana, la cuadrivelocidad especial (U) es la cuadrivelocidad ordinaria ($\mathbf{U}$) y, por lo tanto, el cuadrimomento ($\overline{\mathbf{P}}$) es el cuadrimomento ordinario ($\mathbf{P}$).

Adicionalmente, en partícula masiva : f es el factor de Lorentz $\gamma(\mathbf{v})$.